TRIGONOMÉTRIE

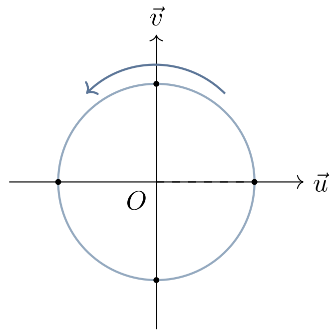
1 Cercle trigonométrique et angles

Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un outil qui permet de définir, visualiser et mémoriser facilement des notions telles que le sinus $\sin$, le cosinus $\cos$ et la tangente $\tan$ d'un angle. Ce dernier permet aussi d'introduire quelques unes de leur propriétés fondamentales que nous allons introduire dans ce cours.

Cercle trigonométrique

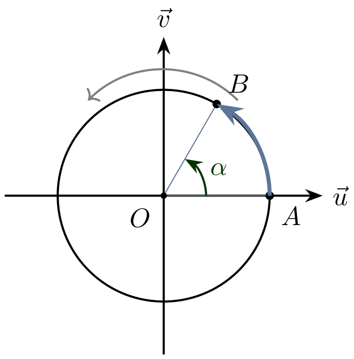
Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le plan muni d'un repère orthonormé.
On appelle **cercle trigonométrique**, le cercle de centre O et de rayon 1.
*Le cercle trigonométrique est orienté positivement, on lit les angles dans le **sens inverse des aiguilles d'une montre**.*
On l'appelle sens trigonométrique.



Remarque

- Le périmètre du cercle ($= 1$ tour) vaut 2π.
- Un demi-tour du cercle vaut π.
- Un quart de tour vaut $\frac{\pi}{2}$
- ...

Les angles, et leurs mesures en radians



Radian

On appelle **mesure en radian** la longueur **orientée** parcourue *(ici en vert)* en partant du point A vers le point B sur le cercle trigonométrique.

Remarque

On peut aussi lire le cercle dans le sens inverse, dans ce cas les angles auront une mesure en radiant **négative**.
Généralement on note un angle avec la lettre *alpha* : α.

Remarque

On sait que le périmètre du cercle ($=$ la longueur d'un tour) donne 2π, alors on dit que le cercle est **périodique** tous les 2π.
Cela signifie alors qu'un angle quelconque α donné en radian **est égal à** $2k\pi$ **près** avec k un entier qui représente le nombre de tour complet réalisé autour du cercle trigonométrique.
On note alors $k \in \mathbb{Z}$,
Cela veut dire que k est un entier qui est soit plus grand que 0, soit égal ou alors plus petit que 0. Puisque le cercle trigonométrique peut être parcouru dans le sens trigonométrique et aussi dans le sens inverse.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'**ensemble des relatifs**, c'est à dire qu'il contient tous les positifs et tous les négatifs. Et l'ensemble des entiers naturels (les positifs) est représenté par $\mathbb{N}$, puisque tous les éléments de $\mathbb{N}$ appartiennent aussi à $\mathbb{Z}$, alors on note :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Se lit $\mathbb{N}$ *est inclus dans* $\mathbb{Z}$.
L'**inclusion** de deux ensembles A et B se produit lorsque tous les éléments de A appartiennent à B.

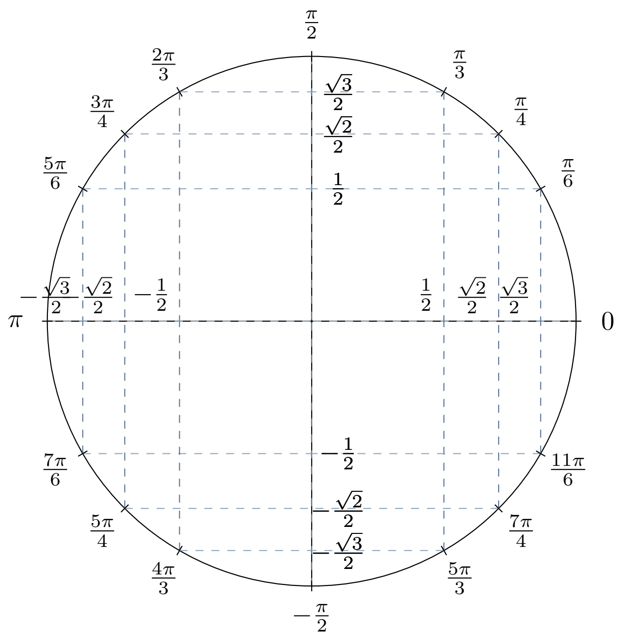
Méthode

Donner toutes les mesures d'un angle

On considère un angle de mesure α.
Pour trouver toutes les mesures d'un angle quelconque, il suffit d'ajouter $2k\pi$ avec k un entier.
On note :

$$\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les angles remarquable



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

θ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\sin(\theta)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Mesure principale

On appelle **mesure principale** d'un angle sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Cosinus, sinus, tangente

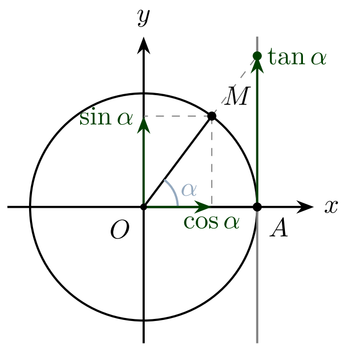
Soit A le point de coordonnées $(1,0)$ et M un point sur le cercle trigonométrique.
On note α l'angle orienté de A vers M de coordonnées $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Le cosinus, le sinus et l'axe des tangentes

On appelle **cosinus** de alpha noté $\cos\alpha$ l'**abscisse** du point M. On appelle **sinus** de alpha noté $\sin\alpha$ l'**ordonnée** du point M.

$$M = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

L'**axe des tangentes** est la droite parallèle à l'axe des ordonnées qui passe par le point A.



La tangente

Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$, alors la droit (OM) rencontre l'axe des tangentes en un point T :
On l'appelle **tangente** de l'angle alpha notée $\tan\alpha$ et représente en fait la longueur orientée $\overrightarrow{AT}$:

$$\tan\alpha = ordonnée(T) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Remarque

Si $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ alors la tangente de l'angle n'est pas définie.
On sait que $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ alors $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{0} = \backslash$.

Propriétés cosinus et sinus

La définition du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique implique les propriétés suivantes :

Propriétés fondamentales

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$
Alors on a :

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

C'est la **formule fondamentale**.
On a dit que les angles sont égaux à $2k\pi$ près avec k un entier, alors on a aussi pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$$

Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$,
Alors on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$$

Propriétés, suite

Par lecture sur le cercle trigonométrique, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

2 Équations trigonométriques et formules d'addition

Équations trigonométriques de niveau 1

Équation trigonométrique de niveau 1

Toute équation de la forme :

$$\cos\alpha = x \qquad \sin\alpha = b \qquad \tan\alpha = c$$

est appelée **équation trigonométrique de niveau 1** où a, b, c sont les mesures respectives du cosinus, du sinus et de la tangente d'un certain **angle remarquable** α a déterminer.

Méthode

Résolution d'une équation trigonométrique de niveau 1

1. On utilise le cercle trigonométrique pour trouver les solutions évidentes, il y en a 2 ou 1 seule.
2. On rajoute $+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ aux solutions trouvées.

On considère une équation trigonométrique de niveau 1 quelconque, et, deux angles α_1 et α_2 qui sont les solutions évidentes de l'équation. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation se note :

$$S = \{\alpha_1 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha_2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Et se lit :
Les solutions de l'équation sont représentée par les ensembles des éléments de la forme $\alpha_1 + 2k\pi$ ***ou*** *$\alpha_2 + 2k\pi$ avec k un entier.*

Remarque

Soit E un ensemble connue. Alors on défini un ensemble E' par :

$$E' = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$$

En fait, cette notation elle veut dire que x est un élément de E' si il appartient a E et qu'il respecte la propriété $\mathcal{P}(x)$.

Si une équation n'admet pas de solutions alors on notera $S = \emptyset$ qui représente l'**ensemble vide**.

Équations trigonométriques de niveau 2

Équation trigonométrique de niveau 2

Toute équation de la forme :

$$\cos X = \cos Y \qquad \sin X = \sin Y \qquad \tan X = \tan Y$$

est appelée **équation trigonométrique de niveau 2** où X est une expression dépendant de x et Y une expression qui peut dépendre de x *(donc pas forcément).*

Solutions d'une équation trigonométrique de niveau 2

- Pour une équation de la forme $\boxed{\cos X = \cos Y}$:

$$X = Y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad ou \qquad X = -Y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Pour une équation de la forme $\boxed{\sin X = \sin Y}$:

$$X = Y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \qquad ou \qquad X = \pi - Y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Pour une équation de la forme $\boxed{\tan X = \tan Y}$:

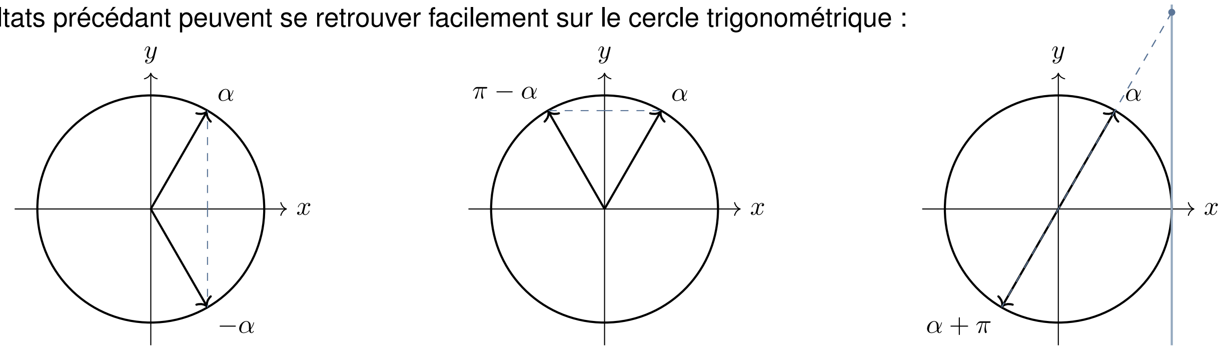
$$X = Y + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Le $k \in \mathbb{Z}$ utilisé dans chacune des solutions n'est pas forcément le même !

Remarque

Les résultats précédant peuvent se retrouver facilement sur le cercle trigonométrique :



3 Les formules d'addition

Les formules suivantes sont évidemment à **connaître par cœur** !

Formules d'addition

Soient a, b deux réels, alors on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad et \qquad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$